Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
7 класс

▷ **1.** Найти число целых неотрицательных решений уравнения $x+y+z=2024$.

Решение: $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Ответ: 2051325

▷ **2.** Найти все целые решения уравнения $x^3+y^3=20232024$.

Решение: Так как x^3 и y^3 могут давать при делении на 9 только остатки 0, 1 и 8; то x^3+y^3 может давать только остатки 0, 1, 2, 7 и 8. Но 20232024 при делении на 9 дает остаток 6. Поэтому уравнение $x^3+y^3=20232024$ не имеет решений в целых числах.
Ответ: $20232024 = 20232027 - 3 = 2248003 \times 9 - 3 = 2248002 \times 9 + 6$.

▷ **3.** Число 321 - составное, но если заменить цифру 2 на 3, то оно станет простым числом 331. Найдите наименьшее трехзначное число, которое останется составным, если в нем произвольно изменить одну из цифр.

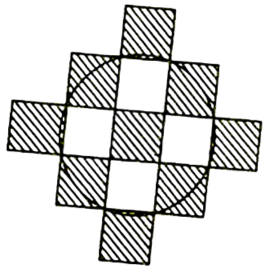
Решение: Наименьшее трехзначеное: $\overline{1a0}=N$. При любых $a=\overline{0,9}$ - число составное.

$a=0$	$N=101$
$a=1$	$N=113$
$a=2$	$N=127$
$a=3$	$N=131$
$a=4$	$N=149$
$a=5$	$N=151$
$a=6$	$N=163$
$a=7$	$N=173$
$a=8$	$N=181$
$a=9$	$N=191$

$N=200$
200 - составное
201:3
202,204,206,208:2
205:5
203=7*26
207:9
209:11
Ответ: 200

▷ **4.** На шахматной доске постройте наибольшую окружность, проходящую только через черные поля.

Решение: Искомая окружность изображена на рисунке.



Её радиус равен $\sqrt{2,5}$. То, что окружность наибольшая, следует из того, что искомая окружность может пересекаться с границами клеток только в углах, но не может пройти подряд через три угла, лежащих на одной прямой.

▷ **5.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{ab}+\overline{cd}=\overline{etg}, \\ \{a,b\}\cup\{c,d\}=\{e,t,g\}. \end{cases}$$

Здесь $\overline{ab}$ - двузначное число, a,b — его цифры. $\{a,b,c,d\}$ - множество однозначных чисел, содержащее $a,b,c,d,\ldots$ - свои элементы. $\cup$ - объединение множеств.

Решение: Смысл второго равенства системы состоит в том, что любая цифра из левой части первого равенства встречается в его правой части, и наоборот. Ясно, что $e=1$. Поэтому 1 встречается в левой части первого равенства. Без ограничений общности можно считать, что $a=1$ или $b=1$.

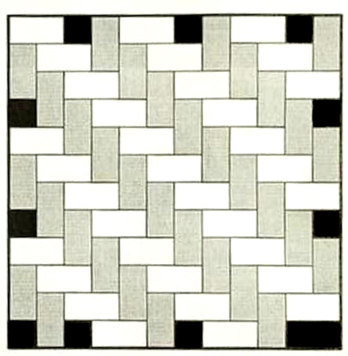
1. Пусть $a=1$. Тогда $c=8$ или $c=9$. Пусть $c=8$. Тогда $t=0$, а значит, $b=0$ либо $d=0$. А это приведет, к тому, что $\overline{ab}+\overline{cd}<100$. Таким образом, $c=9$. Тогда $g=9, b+d=9, t=0$. Получается два решения: $10+99=109$ и $19+90=109$.

2. Пусть b $=1$. Число $d\neq 9$ (иначе a $=0$ или c $=0$). Число $d\neq 0$ (иначе $a=c=1$). Число $d\neq 1$ (иначе $g=2, a=2, c=t, a=10$). Поэтому $g=1+d$, $a+c=10+t$. Значит, $t=d$. Если $a=d+1$, то $c=9, d=8$. Получаем еще одно

решение задачи: $91 + 98 = 189$. При $c = d + 1$ будет $a = 9$ и ответ будет таким же.
Ответ: $10 + 99 = 109$; $19 + 90 = 109$; $91 + 98 = 189$.

▷ **6.** На доску из 2024×2024 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т. е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 4x1. Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски?

Решение: Да, может. Построим «паркет», в котором чередуются ряды вертикальных 2×1 и горизонтальных 1×2 доминошек. На рисунке эти ряды показаны серым и белым цветом для доски 12×12 (непокрытые клетки доски закрашены чёрным).



Похожий пример можно построить и для доски размером 2024×2024. Непокрытыми могут остаться лишь некоторые клетки первой строки и столбца, а также последней строки и столбца. Поэтому доля непокрытых клеток от их общего числа будет не более, чем $\frac{4*2023}{2024*2024} < \frac{4}{2024} = \frac{1}{512} < 1\%$. Значит будет покрыто более 99% всех клеток доски.

▷ **7.** Мальчик наклеивает все свои марки в альбом. Если он наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то, по крайней мере, один лист останется пустым. Если ему подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение: Пусть в альбоме x листов, а y — количество марок у мальчика. Тогда из условия следует, что $20x < y \leq 23(x-1)$ и $y + 21x = 500$. Из второго уравнения $y = 500 - 21x$ подставим в неравенство:

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 500 - 21x \leq 23(x-1), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x > \frac{500}{41}, \\ x \leq \frac{523}{44}. \end{cases}$$

Учитывая, что x — целое, то получаем $x = 12$.
Ответ: 12.

▷ **8.** Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2496, а наибольший общий делитель равен 24?

Решение: Пусть пара (a, b) удовлетворяет условию задачи; тогда $a = 24k, b = 24l$, где k и l — взаимно простые натуральные числа. Поскольку произведение двух натуральных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя на наименьшее общее кратное, то $kl = 104$.

Так как 104=8*13, то имеются следующие пары: $k = 1, l = 104, k = 8, l = 13, k = 13, l = 8, k = 104, l = 1$ и, следовательно, существует 4 пары чисел, удовлетворяющие условию задачи: (24;2496), (192;312), (312;192), (2496;24).
Ответ: (24;2496), (192;312), (312;192), (2496;24).

▷ **9.** Семь томов энциклопедического словаря стоят в следующем порядке: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Расставьте их в порядке возрастания номеров, применив несколько раз следующую операцию: перестановку трех рядом стоящих томов в начало, в конец или между другими томами, не меняя порядка этих трех томов.

Решение: Перестановку можно провести, например, в таком порядке: 1562437 - 1624537 - 1245637 - 1234567.

▷ **10.** В некотором месяце три пятницы пришлись на нечетные числа. Какой день недели был 16 числа этого месяца?

Решение: Три пятницы, выпадающие на четные числа месяца, могут быть только 2, 16 и 30 числа. Четверг или суббота.